MAI 2 - domácí úkol 4

1. Opakování „základních“ pojmů, zvláště totálního diferenciálu:

   Ukažte že funkci $f(x,y)=\dfrac{\sin(x\,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lze spojitě dodefinovat v bodě $(0,0)$.

   Zjistěte, zda pak funkce $f(x,y)$ má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál.

2. Ukázali jsme si na cvičení, že má-li funkce $f(X)$ totální diferenciál v bodě $X_0 \in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a} \in R^n$, $\vec{a} \neq \vec{o}$ (tak zvanou) derivaci ve směru vektoru $\vec{a}$:

$$D_{\vec{a}} f(X_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(X_0+t\,\vec{a})-f(X_0)}{t}=\nabla f(X_0)\cdot\vec{a} \ .$$

   Zjistěte (pomocí $D_{\vec{a}} f(X_0)$), zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

3. Derivace složené funkce více proměnných („řetězové“ pravidlo):
   (promyslete, prosím, co „nejde“- probereme na příštím cvičení)

   „Technika“ derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetězového“ pravidla - jaké to jsou předpoklady? (Vyberte si aspoň dva z dále uvedených příkladů)

   a) Je-li $g(t)=f(\sin t, t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.

   b) Určete $g'(x)$ a $g''(x)$, je-li $g(x)=F(x,\varphi(x))$.

   c) Určete parciální derivace 1.řádu a některou parciální derivaci 2. řádu funkce g , je-li

   (i) $g(x,y)=f(x^2y,\frac{x}{y})$; (ii) $g(x,y)=f(x^2+y^2,xy,\frac{y}{x})$; (iii) $g(x,y,z)=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$.

   d) Určete parciální derivace 1. a 2. řádu funkce $g(x,y)=F(x,y,\varphi(x,y))$.

4*. (Lze si zvolit místo příkladů derivování „nahoře“.)

   Transformujte diferenciální operátor $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic

   ($x=r\cos\varphi, x=r\sin\varphi$, $r\in(0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$) .

   (Úloha pro ty, co by chtěli vyřešit (diferenciální) rovnici $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$)